Zadanie 1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$8+4i+(6+6i)\,z=(4+8i)\,z$$

Rozwiązanie: $z=-1-3i.$

Zadanie 2. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z\,(-6+6i)+(7-3i)\,\overline{z}+7+7i=0$$

Rozwiązanie: $(7-3i)\,(x-iy)+(-6+6i)\,(x+iy)+7+7i=0,$
$(-1+i)\,(x\,(1-2i)+y\,(-2+11i)-7i)=0,$
$\begin{cases} x-9y+7=0 \\ 3x-13y+7=0 \end{cases}$
$z=\{x:2,\ y:1\}.$

Zadanie 3. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1-i)\,z^2+(-3+13i)\,z+(-10-28i)=0$$

Rozwiązanie: $\Delta=-8-6i,\quad \sqrt{\Delta}=\pm(1-3i),\quad z_1=3-2i,\quad z_2=5-3i$

Zadanie 4. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$\text{A}=\begin{bmatrix} -4 & 2x+2 \\ x+4 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\det A=-2x^2-10x-12\neq 0,\quad x\neq-3,\ x\neq-2,$

Zadanie 5. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$\text{A}=\begin{bmatrix} x-2 & -4 & 4 \\ x-2 & x-2 & x-1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x=2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie: $\det A=-x^2+x+6\neq 0,\quad x\neq-2$ oraz $x\neq 3,$
$A(2)=\begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\det A(2)=4,\ A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -12 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$

Zadanie 6. Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T + 2X = X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2X = X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = X \cdot \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$X = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -2 & -13 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$-5-3i+(6-5i)\,z=(7-6i)\,z$$

Rozwiązanie: $z=-1-4i$.

Zadanie 2. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z\,(3+3i)+(4+2i)\,\overline{z}-6-2i=0$$

Rozwiązanie: $(4+2i)\,(x-iy)+(3+3i)\,(x+iy)-6-2i=0$,
$(1+i)\,(x\,(6-i)-y-4+2i)=0$,
$$\begin{cases} 7x-y-6=0 \\ 5x-y-2=0 \end{cases}$$
$z=\{x:2,\ y:8\}$.

Zadanie 3. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(2-i)\,z^2+(-7+11i)\,z+(-20i)=0$$

Rozwiązanie: $\Delta=8+6i,\quad \sqrt{\Delta}=\pm(3+i),\quad z_1=2-2i,\quad z_2=3-i$

Zadanie 4. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$\text{A=}\begin{bmatrix} x+4 & x+1 \\ x+1 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\det A=-x^2+2x+15\neq 0,\quad x\neq -3,\ x\neq 5,$

Zadanie 5. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$\text{A=}\begin{bmatrix} 0 & x+4 & x+2 \\ 1 & 1 & 2x+1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x=-2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie: $\det A=-2x^2-8x-6\neq 0,\quad x\neq -3$ oraz $x\neq -1$,
$$A(-2)=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ \det A(-2)=2,\ A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + 3X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X$$

Rozwiązanie: $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + 3X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot X$, $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \cdot X$
$X = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ -15 & 21 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$(4-3i)\,z=-6-4i+(9-4i)\,z$$

Rozwiązanie: $z=1+i.$

Zadanie 2. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z\,(-5+5i)+(-5-3i)\,\overline{z}+6+2i=0$$

Rozwiązanie: $(-5-3i)\,(x-iy)+(-5+5i)\,(x+iy)+6+2i=0,$
$(-2-2i)\,(x\,(2-3i)+y\,(2-2i)-2+i)=0,$
$$\begin{cases} -10x-8y+6=0 \\ 2x+2=0 \end{cases}$$
$z=\{x:-1,\ y:2\}.$

Zadanie 3. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1+2i)\,z^2+(6-13i)\,z+(-22+6i)=0$$

Rozwiązanie: $\Delta=3-4i,\quad \sqrt{\Delta}=\pm(2-i),\quad z_1=2+2i,\quad z_2=2+3i$

Zadanie 4. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} x-4 & 2x-4 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & x+3 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\det A=3x^2+24x\neq 0,\quad x\neq -8,\ x\neq 0,$

Zadanie 5. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2x+3 \\ -3 & -2 & x+2 \\ x+3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x=-2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie: $\det A=2x^2-10x-12\neq 0,\quad x\neq -1$ oraz $x\neq 6,$
$$A(-2)=\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ \det A(-2)=16,\ A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ -4 & -8 & -12 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T + 2X = X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + 2X = X \cdot \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = X \cdot \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$2 + 8i + (4 - 4i)\, z = (3 - 5i)\, z$$

Rozwiązanie: $z = -5 - 3i.$

Zadanie 2. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z\,(1 + 2i) + (-1 + 3i)\,\overline{z} + 6 - 3i = 0$$

Rozwiązanie: $(-1 + 3i)\,(x - iy) + (1 + 2i)\,(x + iy) + 6 - 3i = 0,$
$(-2 + i)\,(x\,(1 - 2i) - iy - 3) = 0,$
$\begin{cases} y + 6 = 0 \\ 5x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$
$z = \{x : 3,\ y : -6\}\,.$

Zadanie 3. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(3 - 2i)\, z^2 + (12 + 5i)\, z + (3 + 11i) = 0$$

Rozwiązanie: $\Delta = -5 + 12i, \quad \sqrt{\Delta} = \pm(2 + 3i), \quad z_1 = -1 - 2i, \quad z_2 = -1 - i$

Zadanie 4. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$\text{A=}\begin{bmatrix} x+1 & x+1 \\ x-1 & -4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\det A = -x^2 - 4x - 3 \neq 0, \quad x \neq -3,\ x \neq -1,$

Zadanie 5. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$\text{A=}\begin{bmatrix} 2x+1 & x+4 \\ x-1 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = 2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie: $\det A = -x^2 + x + 6 \neq 0, \quad x \neq -2$ oraz $x \neq 3,$
$A(2) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\det A(2) = 4,\ A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$

Zadanie 6. Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T + 2X = X \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} + 2X = X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
$X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$-4+6i+(7-4i)\,z=(8-5i)\,z$$

Rozwiązanie: $z=-5+i.$

Zadanie 2. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z\,(-5+6i)+(-2+i)\,\overline{z}+5+3i=0$$

Rozwiązanie: $(-2+i)\,(x-iy)+(-5+6i)\,(x+iy)+5+3i=0,$
$(-1+i)\,(7x+y\,(1+4i)-1-4i)=0,$
$\begin{cases} -7x-5y+5=0 \\ 7x-3y+3=0 \end{cases}$
$z=\{x:0,\ y:1\}\,.$

Zadanie 3. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1-i)\,z^2+(-13-i)\,z+(18+26i)=0$$

Rozwiązanie: $\Delta=-8-6i,\quad \sqrt{\Delta}=\pm(1-3i),\quad z_1=2+4i,\quad z_2=4+3i$

Zadanie 4. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -3 & x+3 & -1 \\ -3 & x+3 & x+4 \\ -2 & 4 & x+4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\det A=-2x^2-4x+30\neq 0,\quad x\neq -5,\ x\neq 3,$

Zadanie 5. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} x+4 & -4 & -2 \\ x-2 & x-2 & -2 \\ 3 & x-1 & -3 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x=3$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie: $\det A=48-3x^2\neq 0,\quad x\neq -4$ oraz $x\neq 4,$
$A(3)=\begin{bmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix},\ \det A(3)=21,\ A^{-1}=\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 1 & -16 & 10 \\ -3 & -15 & 12 \\ -1 & -26 & 11 \end{bmatrix}.$

Zadanie 6. Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + 3X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \\ -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X$$

Rozwiązanie: $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} + 3X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot X$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot X$
$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 13 & 7 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$(5-5i)\,z = 8 - i + (2-3i)\,z$$

Rozwiązanie: $z = 2 + i$.

Zadanie 2. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z\,(-3-4i) + (-2+3i)\,\overline{z} + 1 + 5i = 0$$

Rozwiązanie: $(-2+3i)\,(x-iy) + (-3-4i)\,(x+iy) + 1 + 5i = 0$,
$(-1-i)\,(x\,(3-2i) + y\,(-3+4i) - 3 - 2i) = 0$,
$\begin{cases} -5x + 7y + 1 = 0 \\ -x - y + 5 = 0 \end{cases}$
$z = \{x : 3,\ y : 2\}$.

Zadanie 3. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(2-i)\,z^2 + (-13-6i)\,z + (6+22i) = 0$$

Rozwiązanie: $\Delta = -3+4i$, $\sqrt{\Delta} = \pm(1+2i)$, $z_1 = 2+2i$, $z_2 = 2+3i$

Zadanie 4. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$\text{A=}\begin{bmatrix} 2 & -4 & x+2 \\ x+3 & 1 & -4 \\ 2x-2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\det A = -x^2 + 39x \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq 39$,

Zadanie 5. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$\text{A=}\begin{bmatrix} -2 & x+3 \\ 2x+2 & x+1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x = -2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie: $\det A = -2x^2 - 10x - 8 \neq 0$, $x \neq -4$ oraz $x \neq -1$,
$A(-2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\det A(-2) = 4$, $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 6. Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + 4X = X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 4X = X \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = X \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$
$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$-1+9i+(5+6i)\,z=(6+5i)\,z$$

Rozwiązanie: $z=-5+4i.$

Zadanie 2. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z\,(4-5i)+(4+6i)\,\overline{z}+4+6i=0$$

Rozwiązanie: $(4+6i)\,(x-iy)+(4-5i)\,(x+iy)+4+6i=0,$
$i\,(x\,(1-8i)-11iy+6-4i)=0,$
$\begin{cases} 8x+11y+4=0 \\ x+6=0 \end{cases}$
$z=\{x:-6,\ y:4\}.$

Zadanie 3. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1-i)\,z^2+(7+i)\,z+(6+8i)=0$$

Rozwiązanie: $\Delta=-8+6i,\quad \sqrt{\Delta}=\pm(1+3i),\quad z_1=-2-i,\quad z_2=-1-3i$

Zadanie 4. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$\text{A=}\begin{bmatrix} -2 & -4 & x+2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2x & x-3 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\det A=-3x^2-27x-42\neq 0,\quad x\neq-7,\ x\neq-2,$

Zadanie 5. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$\text{A=}\begin{bmatrix} x-1 & -2 & x+3 \\ -2 & x-1 & -1 \\ -3 & x & -3 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x=-2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie: $\det A=-x^2+5x-6\neq 0,\quad x\neq 2$ oraz $x\neq 3,$
$A(-2)=\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $\det A(-2)=-20,\ A^{-1}=-\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -3 & 12 & -5 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$

Zadanie 6. Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T + 2X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X$$

Rozwiązanie: $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X$, $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X$
$X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$6+8i+(4+2i)\,z=(3-i)\,z$$

Rozwiązanie: $z=-3+i.$

Zadanie 2. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z\,(7+2i)+(3+5i)\,\overline{z}-1+5i=0$$

Rozwiązanie: $(3+5i)\,(x-iy)+(7+2i)\,(x+iy)-1+5i=0,$
$i\,(x\,(7-10i)+y\,(4-3i)+5+i)=0,$
$\begin{cases} 10x+3y-1=0 \\ 7x+4y+5=0 \end{cases}$
$z=\{x:1,\ y:-3\}\,.$

Zadanie 3. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1-i)\,z^2+(-11-i)\,z+(12+16i)=0$$

Rozwiązanie: $\Delta=8+6i,\quad \sqrt{\Delta}=\pm(3+i),\quad z_1=2+2i,\quad z_2=3+4i$

Zadanie 4. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$\text{A=}\begin{bmatrix} 1 & x-1 \\ x+2 & x-2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\det A=-x^2\neq 0,\quad x\neq 0,$

Zadanie 5. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$\text{A=}\begin{bmatrix} x+3 & x-3 & 4 \\ -1 & x+1 & 1 \\ x+1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x=-2$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie: $\det A=-x^2+x\neq 0,\quad x\neq 0$ oraz $x\neq 1,$
$A(-2)=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ \det A(-2)=-6,\ A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}.$

Zadanie 6. Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T + 4X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X$$

Rozwiązanie: $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} \cdot X$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -7 & -6 \end{bmatrix} \cdot X$

$X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$-5-3i+(4-3i)\,z=(8-4i)\,z$$

Rozwiązanie: $z=-1-i.$

Zadanie 2. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z\,(-5+5i)+(-3+7i)\,\overline{z}+6-6i=0$$

Rozwiązanie: $(-3+7i)\,(x-iy)+(-5+5i)\,(x+iy)+6-6i=0,$
$(-2+2i)\,(x\,(5-i)-y-3)=0,$
$\begin{cases} -8x+2y+6=0 \\ 12x-2y-6=0 \end{cases}$
$z=\{x:0,\ y:-3\}\,.$

Zadanie 3. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1+2i)\,z^2+(-10-5i)\,z+(14-2i)=0$$

Rozwiązanie: $\Delta=3-4i,\quad \sqrt{\Delta}=\pm(2-i),\quad z_1=2-2i,\quad z_2=2-i$

Zadanie 4. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 4 & x+2 & 1 \\ 1 & 2x-2 & 1 \\ x-1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\det A=-x^2-2x+15\neq 0,\quad x\neq -5,\ x\neq 3,$

Zadanie 5. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} x-2 & x-2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2x-1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x=-1$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie: $\det A=-2x^2-6x+8\neq 0,\quad x\neq -4$ oraz $x\neq 1,$
$A(-1)=\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\det A(-1)=12,\ A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 7 & 15 & 3 \\ 8 & 12 & 0 \end{bmatrix}.$

Zadanie 6. Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T + 4X = X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 4X = X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić rozwiązanie.

$$(7-i)\,z = -5+4i+(7-2i)\,z$$

Rozwiązanie: $z = 4+5i$.

Zadanie 2. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

$$z\,(-6-4i)+(-4-5i)\,\overline{z}+2+4i=0$$

Rozwiązanie: $(-4-5i)\,(x-iy)+(-6-4i)\,(x+iy)+2+4i=0$,
$-i\,(x\,(9-10i)+y\,(2-i)-4+2i)=0$,
$\begin{cases} -10x-y+2=0 \\ -9x-2y+4=0 \end{cases}$
$z=\{x:0,\ y:2\}$.

Zadanie 3. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych. Sprawdzić jedno z rozwiązań.

$$(1+2i)\,z^2+(14+3i)\,z+(18-14i)=0$$

Rozwiązanie: $\Delta = 3-4i$, $\sqrt{\Delta}=\pm(2-i)$, $z_1=-2+2i$, $z_2=-2+3i$

Zadanie 4. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x wyznacznik macierzy A jest różny od zera?

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -3 & x-4 \\ x+1 & x+1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: $\det A = 1-x^2 \neq 0$, $x\neq -1,\ x\neq 1$,

Zadanie 5. Dla jakich rzeczywistych wartości parametru x macierz A posiada odwrotność?

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -2 & x-4 \\ x+1 & 2x-1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną dla $x=-1$. Wykonać sprawdzenie.

Rozwiązanie: $\det A = -x^2-x+6\neq 0$, $x\neq -3$ oraz $x\neq 2$,
$A(-1)=\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\det A(-1)=6$, $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 6. Rozwiązać równanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T + 2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot X$$

Rozwiązanie: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot X$, $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X$
$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$.